

Padovan-circulant-Hurwitz Dizilerinin m Modülüne Göre Periyotları

Zafer ADIGÜZEL*, Özgür ERDAĞ^{ID}, Ömür DEVECİ

Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kars, Türkiye

Geliş / Received: 26/11/2018, Kabul / Accepted: 13/05/2019

Öz

Padovan-circulant-Hurwitz dizisi ve Padovan-circulant-Hurwitz matrisi Adıgüzel vd. tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada Padovan-circulant-Hurwitz matrisinin m modülüne göre indirgenmesi suretiyle bu matris üreteç olarak seçilerek devirli gruplar elde edilmiştir. Ayrıca üretilen devirli grupların mertebeleri ile dizinin m modülüne göre periyotları arasında bağıntılar oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Circulant Matris, Dizi, Periyot

Padovan-circulant-Hurwitz Sequences Modulo m

Abstract

The Padovan-circulant-Hurwitz sequence and the Padovan-circulant-Hurwitz matrix were defined by Adıgüzel et al.. In this work, we consider the cyclic groups which are generated by the multiplicative orders of the Padovan-circulant-Hurwitz matrix when read modulo m . Also, we study the Padovan-circulant-Hurwitz sequence modulo m and then we obtain the relationship among the periods of the Padovan-circulant-Hurwitz sequence modulo m and the orders of the cyclic groups obtained.

Keywords: Circulant Matrix, Sequence, Period

1. Giriş

İndirgemeli bir dizinin α modülüne göre periyodu aynı zamanda bu dizinin α -inci mertebeden bir devirli gruptaki periyoduna

karşılık gelmektedir. İndirgemeli diziler cebirsel yapılara ilk olarak Wall (1960) tarafından taşınmıştır. Wall, bu çalışmada devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini incelemiştir. Gruplarda indirgemeli diziler

üzerine oluşturulan konsept, daha sonra yapılan çalışmalarla çeşitli indirgemeli dizilerin farklı grup ailelerinde incelenmesi şeklinde genişletilmiştir (Aydın ve Aydın, 1998; Campbell vd., 1990; Deveci, 2015; Deveci, baskıda; Knox, 1992; Lü ve Wang 2006; Özkan vd., 2003).

2. Materyal ve Metot

Adıgüzel vd., Padovan-circulant-Hurwitz dizilerini $n \geq 1$ için sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$a^1(1) = a^1(2) = a^1(3) = 0$ ve $a^1(4) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^1(n+4) = a^1(n+2) - a^1(n+1) + a^1(n), \quad (1)$$

$a^2(1) = a^2(2) = a^2(3) = a^2(4) = 0$ ve $a^2(5) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^2(n+5) = -a^2(n+2) + a^2(n+1) + a^2(n), \quad (2)$$

$a^3(1) = a^3(2) = a^3(3) = a^3(4) = a^3(5) = 0$ ve $a^3(6) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^3(n+6) = -a^3(n+3) + a^3(n+2) + a^3(n), \quad (3)$$

$a^4(1) = a^4(2) = a^4(3) = a^4(4) = a^4(5) = 0$ ve $a^4(6) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^4(n+6) = a^4(n+3) - a^4(n+2) + a^4(n). \quad (4)$$

(1), (2), (3) ve (4) ifadeleri yardımıyla, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizileri için Companion matris formundaki üreteç matrisleri sırasıyla;

$$PH^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PH^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PH^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$PH^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış olup, $PH^{(1)}$, $PH^{(2)}$, $PH^{(3)}$ ve $PH^{(4)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisleri olarak adlandırılır.

$k = 1, 2, 3, 4$ için $a^k(\alpha)$ notasyonu a_α^k şeklinde gösterilsin. $\alpha \geq 3$ için α üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak $(PH^{(1)})^\alpha$, $(PH^{(2)})^\alpha$, $(PH^{(3)})^\alpha$ ve $(PH^{(4)})^\alpha$ matrisleri;

$$(PH^{(1)})^\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha+4}^1 & a_{\alpha+5}^1 & a_{\alpha+2}^1 - a_{\alpha+3}^1 & a_{\alpha+3}^1 \\ a_{\alpha+3}^1 & a_{\alpha+4}^1 & a_{\alpha+1}^1 - a_{\alpha+2}^1 & a_{\alpha+2}^1 \\ a_{\alpha+2}^1 & a_{\alpha+3}^1 & a_\alpha^1 - a_{\alpha+1}^1 & a_{\alpha+1}^1 \\ a_{\alpha+1}^1 & a_{\alpha+2}^1 & a_{\alpha-1}^1 - a_\alpha^1 & a_\alpha^1 \end{bmatrix},$$

(5)

$$(PH^{(2)})^\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+6}^2 & a_{\alpha+7}^2 & a_{\alpha+3}^2 + a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+4}^2 \\ a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+6}^2 & a_{\alpha+2}^2 + a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+3}^2 \\ a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+1}^2 + a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+2}^2 \\ a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+4}^2 & a_\alpha^2 + a_{\alpha+1}^2 & a_{\alpha+1}^2 \\ a_{\alpha+1}^2 & a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha-1}^2 + a_\alpha^2 & a_\alpha^2 \end{bmatrix},$$

(6)

$$(PH^{(3)})^\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+7}^3 & a_{\alpha+8}^3 & a_{\alpha+3}^3 + a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 \\ a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+7}^3 & a_{\alpha+2}^3 + a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 \\ a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+1}^3 + a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 \\ a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 & a_\alpha^3 + a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+1}^3 & a_{\alpha+2}^3 \\ a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha-1}^3 + a_{\alpha+1}^3 & a_\alpha^3 & a_{\alpha+1}^3 \\ a_{\alpha+1}^3 & a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha-2}^3 + a_\alpha^3 & a_{\alpha-1}^3 & a_\alpha^3 \end{bmatrix},$$

(7)

ve

$$(PH^{(4)})^\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+7}^4 & a_{\alpha+8}^4 & a_{\alpha+3}^4 - a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 \\ a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+7}^4 & a_{\alpha+2}^4 - a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 \\ a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+1}^4 - a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 \\ a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 & a_\alpha^4 - a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+1}^4 & a_{\alpha+2}^4 \\ a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha-1}^4 - a_{\alpha+1}^4 & a_\alpha^4 & a_{\alpha+1}^4 \\ a_{\alpha+1}^4 & a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha-2}^4 - a_\alpha^4 & a_{\alpha-1}^4 & a_\alpha^4 \end{bmatrix}$$

(8)

şeklinde elde edilmiştir. Burada

$$\det(PH^{(1)})^\alpha = (PH^{(3)})^\alpha = (PH^{(4)})^\alpha = (-1)^\alpha$$

ve $\det(PH^{(2)})^\alpha = 1$ olduğu açıktır.

3. Bulgular

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir

$A = [a_{ij}]$ matrisi için, A nın her elemanının

$\text{mod } \alpha$ ya göre indirgenmesi $A(\text{mod } \alpha)$

şeklinde ifade edilir. Yani

$$A(\text{mod } \alpha) = (a_{ij}(\text{mod } \alpha)) \quad \text{dir.}$$

$\langle A \rangle_\alpha = \{A^i(\text{mod } \alpha) \mid i \geq 0\}$ olmak üzere

obeb($\alpha, \det A$) = 1 ise, o zaman $\langle A \rangle_\alpha$ bir

devirli gruptur. $\langle A \rangle_\alpha$ devirli grubunun

mertebesi $|\langle A \rangle_\alpha|$ ile gösterilir. $PH^{(k)}$,

($k = 1, 2, 3, 4$) matrisleri için

$$\det PH^{(1)} = \det PH^{(3)} = \det PH^{(4)} = -1 \quad \text{ve}$$

$$\det PH^{(2)} = 1 \quad \text{olduğundan } m \text{ nin tüm pozitif}$$

tam sayı değeri için $\langle PH^{(1)} \rangle_m, \langle PH^{(2)} \rangle_m,$

$\langle PH^{(3)} \rangle_m$ ve $\langle PH^{(4)} \rangle_m$ devirli gruplardır.

Teorem 2.1: r bir asal sayı ve $k = 1, 2, 3, 4$

için $\langle PH^{(k)} \rangle_{r^m}$ devirli gruplar olsun. Eğer $u,$

$$|\langle PH^{(k)} \rangle_r| = |\langle PH^{(k)} \rangle_{r^u}| \quad \text{eşitliğini sağlayan en}$$

büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$

$$\text{için } |\langle PH^{(k)} \rangle_{r^v}| = r^{v-u} \cdot |\langle PH^{(k)} \rangle_r| \quad \text{eşitliği}$$

yazılır. Özellikle $|\langle PH^{(k)} \rangle_r| \neq |\langle PH^{(k)} \rangle_{r^2}|$ ise,

$$\text{her } v \geq 2 \quad \text{için } |\langle PH^{(k)} \rangle_{r^v}| = r^{v-2} \cdot |\langle PH^{(k)} \rangle_r|$$

olur.

İspat: $k = 1$ için $\langle PH^{(1)} \rangle_{r^m}$ devirli grubunu

ele alalım. Farzedelim ki t pozitif bir tamsayı

olsun ve $|\langle PH^{(1)} \rangle_{r^m}|, h(r^m)$ ile gösterilsin.

$$\text{Eğer } (PH^{(1)})^{h(r^{t+1})} = I(\text{mod } r^{t+1}) \quad \text{ise}$$

$$(PH^{(1)})^{h(r^{t+1})} = I(\text{mod } r^t) \quad \text{dir. Burada } I,$$

4×4 tipinde birim matristir. Böylece $h(r^t)$

nin $h(r^{t+1})$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca

$$(PH^{(1)})^{h(r^t)} = I + (m_{ij}^{(t)} r^t) \quad \text{eşitliği yazılarak}$$

binom açılımından

$$(PH^{(1)})^{h(r^t)r} = (I + (m_{ij}^{(t)} r^t))^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (m_{ij}^{(t)} r^t)^i \equiv I(\text{mod } r^{t+1})$$

elde edilir ki, bu da $h(r^{t+1})$ nin $h(r^t) \cdot r$ tarafından bölünebilir olduğu gösterir. Bundan dolayı $h(r^{t+1}) = h(r^t)$ yada $h(r^{t+1}) = h(r^t) \cdot r$ dir. Ancak $h(r^{t+1}) = h(r^t) \cdot r$ eşitliğinin sağlanması r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(t)}$ nin var olması ile mümkündür. u , $h(r) = h(r^u)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $h(r^u) \neq h(r^{u+1})$ eşitsizliği yazılır ki bu eşitsizlik, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ nin mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $h(r^{u+1}) \neq h(r^{u+2})$ sonucu elde edilir. u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$k = 2, 3, 4$ için ispat benzer şekildedir.

$\{a_\alpha^k\}$ Padovan-circulant-Hurwitz tipli diziler bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\{a_\alpha^k(m)\} = \{a_\alpha^1(m), a_\alpha^2(m), \dots, a_\alpha^i(m), \dots\}$$

dizisi elde edilir ve burada $a_\alpha^k(m) = a_\alpha^k \pmod{m}$ dir.

Teorem 2.2: $k = 1, 2, 3, 4$ için $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir.

İspat: Farz edelim ki $T = \{(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid 0 \leq t_i \leq m-1\}$ olsun. Bu durumda $|Q| = m^k$ dir. Q_m nin elemanlarının m^k tane farklı k -tiplisi mevcut olduğundan, bu k -tiplilerden en az bir tanesi $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -tiplileri takip eden alt dizi tekrarlanır.

Dolayısıyla dizi periyodiktir. $i > j$ olmak üzere

$$a_\alpha^{i+1}(m) \equiv a_\alpha^{j+1}(m), a_\alpha^{i+2}(m) \equiv a_\alpha^{j+2}(m), \dots, a_\alpha^{i+k}(m) \equiv a_\alpha^{j+k}(m)$$

ise $i \equiv j \pmod{k}$ olduğu sonucuna ulaşılır. Padovan-circulant-Hurwitz dizilerinin tanımından

$$a_\alpha^i(m) \equiv a_\alpha^j(m), a_\alpha^{i-1}(m) \equiv a_\alpha^{j-1}(m), \dots, a_\alpha^{i-j+1}(m) \equiv a_\alpha^1(m)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodu $S^k(m)$ ile gösterilsin.

(5), (6), (7) ve (8) matrisleri için her m pozitif tamsayıları ve $k = 1, 2, 3, 4$ için

$$S^k(m) = \left| \left\langle PH^{(k)} \right\rangle_m \right| \text{ elde edilir.}$$

Teorem 2.3: p_i ler farklı asal sayıları olmak

üzere $m = \prod_{i=1}^u (p_i)^{r_i}$, ($u \geq 1$) olsun. O zaman

$$S^k(m) = \text{okek} \left[S^k((p_1)^{r_1}), S^k((p_2)^{r_2}), \dots, S^k((p_u)^{r_u}) \right]$$

dır.

İspat: $\{a_{(p_i)^{r_i}}^k(m)\}$ dizisinin periyodu $S^k((p_i)^{r_i})$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda \cdot S^k((p_i)^{r_i})$, ($\lambda \in N$) uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $S^k(m)$, $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\{a_{(p_i)^{r_i}}^k(m)\}$ dizisi $S^k(m)$ terimde bir defa tekrar eder. Böylece, her i değeri için $S^k(m)$ periyodu $\lambda \cdot S^k(m)$

şeklinde olup bu sayı $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodu vermektedir. Dolayısıyla

$$S^k(m) = \text{okək} \left[S^k \left((p_1)^{r_1} \right), S^k \left((p_2)^{r_2} \right), \dots, S^k \left((p_u)^{r_u} \right) \right]$$

eşitliği elde edilir.

4. Teşekkür

Bu çalışma, 2017-FM-65 numaralı proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

5. Kaynaklar

Adıgüzel, Z., Erdağ, Ö., Deveci, Ö. “Padovan-circulant-Hurwitz Sequences”, 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences-ICMRS, 30 April-04 May, Belek, Antalya, Turkey.

Aydın, H., Aydın, R. 1998. “General Fibonacci Sequences in Finite Groups”, *Fibonacci Quarterly*, 36(3), 216-221.

Campbell, C. M., Doostie, H., Robertson, E. F. 1990. “Fibonacci Length of Generating Pairs in Groups in Applications of Fibonacci Numbers”, *Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers*, 27-35.

Deveci, Ö. 2015. “The Pell-Padovan Sequences and The Jacobsthal-Padovan Sequences in Finite Groups”, *Utilitas Mathematica*, 98, 257-270.

Deveci, Ö. “The Padovan-Circulant Sequences and their Applications”, *Mathematical Reports*, Baskıda.

Knox, S. W. 1992. “Fibonacci Sequences in Finite Groups”, *Fibonacci Quarterly*, 30, 116-120.

Lü, K., Wang, J. 2006. “k-Step Fibonacci sequence modulo m ”, *Utilitas Mathematica*, 71, 169-177.

Özkan, E., Aydın, H., Dikici, R. 2003. “3-step Fibonacci series modulo m ”, *Applied Mathematics and Computation*, 143, 165-172.

Wall, D. D. 1960. “Fibonacci series modulo m ”, *American Mathematical Monthly*, 67, 525-532.